C1692

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

DURÉE: 4 HEURES

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail

Le sujet comporte 5 pages

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

Soient a, b, c trois réels tels que $b \neq c$.

Question 1 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'équation :

$$\forall n \geq 0, \qquad u_{n+2} - (2a - b - c)u_{n+1} + (a - b)(a - c)u_n = 0. \tag{0.1}$$

1. Déterminer les deux reéls non nuls r_1 et r_2 en fonction de a, b et c tels que les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient solutions de l'équation (0.1).

2. Pour toute solution $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'équation (0.1), on pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n = u_n - r_1 u_{n-1}.$$

   (a) Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer v_n en fonction de v_{n-1}, puis en fonction de v_1.

   (b) En déduire une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de u_{n-1}, v_1, r_1, r_2 et n.

3. Pour toute solution $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'équation (0.1), on pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$w_n = u_n - r_2 u_{n-1}.$$

   Donner l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de u_{n-1}, w_1, r_1, r_2 et n.

4. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions de l'équation (0.1) sont de la forme :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

   où λ et μ sont des constantes que l'on explicitera en fonction de u_0 et u_1.

Question 2 : Soit n entier strictement positif. On note Δ_n le déterminant de la matrice A_n, de dimension $n \times n$, comportant des a sur la diagonale, des b sur la partie triangulaire supérieure et des c sur la partie triangulaire inférieure :

$$\Delta_n = \det(A_n) = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ c & a & b & & \vdots \\ \vdots & c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

Par convention on pose $\Delta_0 = 1$.

1. Calculer Δ_1 et Δ_2.

2. Pour tout entier n, exprimer Δ_{n+2} en fonction de Δ_{n+1} et Δ_n
   (*Indication : on pourra retrancher la deuxième colonne à la première colonne, puis la deuxième ligne à la première ligne*).

3. En utilisant la **Question 1**, en déduire que, pour tout entier n,

$$\Delta_n = \frac{1}{c-b}\left[(a-b)^n c - (a-c)^n b\right]$$

4. Quelle relation vérifient les valeurs propres de la matrice A_n?

5. On suppose dorénavant que $b = c$.

   (a) Faire un développement limité au premier ordre au voisinage de $h = 0$ de la fonction

   $$f(h) = (a-b)^n(b+h) - (a-b-h)^n b.$$

   (b) Calculer le déterminant de A_n en utilisant ce qui précède.

   (c) Vérifier que l'expression obtenue pour le déterminant de A_n dans le cas $b = c$ est exacte pour $n = 3$.

Exercice I

Soit Y une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité notée f, strictement positive sur tout $\mathbb{R}$. Cette variable admet une espérance notée μ et une variance notée σ^2. On note p un réel appartenant à $]0,1[$ et F_Y la fonction de répartition de la variable aléatoire Y :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(y)dy.$$

1. Soit t un réel positif. Montrer que

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \geq t^2 \int_{t}^{+\infty} f(x)dx.$$

   Ecrire cette inégalité en utilisant la fonction F_Y et l'espérance de Y^2, notée $\mathbb{E}(Y^2)$.

2. (a) La fonction de répartition F_Y est-elle strictement monotone ?

   (b) Pour t réel, exprimer $P(Y - \mu > t)$ à l'aide de la fonction de répartition de Y.

   (c) On note Z la variable définie par $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$. Soit t un réel quelconque, exprimer $F_Y(t)$ à l'aide de la fonction de répartition de Z.

   (d) Soit t un réel quelconque. Exprimer $\mathbb{E}[(t-Y)^2]$ en fonction de t, μ et σ^2. Que vaut cette expression pour $t = \mu$?

3. (a) On suppose $\mu = 0$. Montrer que pour tout $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a

   $$t \leq \sigma\sqrt{\frac{1}{1-p}}.$$

   On utilisera en particulier la question 1.

(b) L'espérance μ est maintenant quelconque. Déduire de la question 3.(a) que pour tout $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a

$$t \leq \sigma\sqrt{\frac{1}{1-p}} + \mu.$$

(c) Montrer que, le neuvième décile de la loi de Y (c'est-à-dire t tel que $F_Y(t) = 0.9$) peut être majoré par

$$\sigma\sqrt{10} + \mu.$$

4. Le but de cette question est d'affiner les inégalités obtenues précédemment. Pour toute variable Y telle que $\mu = 0$, on admet le résultat suivant : pour tout réel $t > 0$

$$t \leq \sqrt{\mathbb{E}((t-Y)^2)}\sqrt{\mathbb{P}(Y \leq t)}. \tag{0.2}$$

(a) On suppose dans cette question que $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. Déduire de (0.2) que, pour tout $t > 0$

$$\mathbb{P}(Y > t) \leq \frac{1}{t^2+1}.$$

En déduire que pour tout $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$,

$$t \leq \sqrt{\frac{p}{1-p}}.$$

(b) L'espérance μ et la variance σ^2 sont maintenant quelconques. Montrer que, pour tout $t > 0$ tel que $F_Y(t) = p$, on a

$$t \leq \sigma\sqrt{\frac{p}{1-p}} + \mu.$$

(c) Montrer que, le neuvième décile de la loi de Y peut être majoré par

$$3\sigma + \mu.$$

Exercice II

On observe le nombre de familles bénéficiaires de l'allocation de parent isolé sur la période 1995 à 2003. Ces données sont fournies par la DREES (Direction de la Recherche des Etudes et de l'Evaluation et des Statistiques).

Nombre de familles bénéficiaires de l'allocation parent isolé, en milliers, au 31 décembre.

1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
164	163	168	170	177	181	189	164	170

1. Calculer la moyenne et la variance (vous préciserez les formules utilisées) du nombre de familles bénéficiaires de l'allocation parent isolé sur la période 1995 à 2003.

2. Effectuer une représentation graphique de cette série d'observations.

3. On suppose que les observations de cette série sont issues d'une variable aléatoire que l'on supposera de loi Laplace-Gauss. Calculer un intervalle de confiance bilatère de l'espérance du nombre de familles bénéficiaires de l'allocation parent isolé avec un niveau de confiance α. On exprimera cet intervalle à l'aide de la fonction de répartition d'une loi que l'on précisera.
   On présentera soigneusement la démarche utilisée.

Fin de l'épreuve.